УДК 517.53+532.546

ЗАДАЧА R-ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ДВУХ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ КОЛЕЦ

А.Ю. Казарин

Аннотация

В работе получено решение задачи R-линейного сопряжения для двух концентрических колец в классе кусочно-меромофных функций с заданными главными частями. Решение записано в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда Тейлора. С помощью пакета Mathematica построены линии тока и эквипотенциали для некоторых возмущенных полей.

Ключевые слова: (кольцевая структура, задача R-линейного сопряжения, гетерогенные структуры, комплексный потенциал, мероморфные функции)

1. Введение

Одними из наиболее распространенных структур, встречающихся в природе, являются кольцевые структуры. Поэтому они представляют определенный интерес с точки зрения теории гетерогенных сред. В работе [1] рассмотрено обобщение теоремы Милн-Томсона на случай одного концентрического кольца. Найден комплексный потенциал, являющийся замкнутым аналитическим решением поставленной проблемы. Цель настоящей работы - определение комплексного потенциала в кольцевой структуре, состоящей из двух концентрических колец в классе кусочно-мероморфных функций с фиксированными главными частями. Перейдем к точной постановке рассматриваемой задачи.

2. Постановка задачи

Рассмотрим среду, состоящую из внешности круга $S_1 = \{z : |z| > r_1\}$, круга $S_4 = \{z : |z| < r_3\}$ и колец $S_2 = \{z : r_2 < |z| < r_1\}$, $S_3 = \{z : r_3 < |z| < r_2\}$, где $r_k \in \mathbb{R}$, $r_1 > r_2 > r_3 > 0$. Рисунок. 1.

Требуется построить плоскопараллельное стационарное силовое поле $\mathrm{v}(x, y) = (\upsilon_x, \upsilon_y) = \upsilon_p(x, y)$, $(x, y) \in S_p$, $p = \overline{1, 4}$, соответствующий комплексный потенциал которого имеет фиксированную главную часть $f(z)$ с конечным множеством особых точек $T = T_1 \cup \cdots \cup T_4$, $T_p \subset S_p$.

Краевые условия запишем с помощью классической модели, общепринятой в теории гетерогенных сред [2].

$$\begin{cases} v_1(t) = A_1 v_2(t) + B_1 r_1^2 t^{-2}\overline{v_2(t)}, & t \in l_1 = \{t : \ |t| = r_1\}, \\ v_2(t) = A_2 v_3(t) + B_2 r_2^2 t^{-2}\overline{v_3(t)}, & t \in l_2 = \{t : \ |t| = r_2\}, \\ v_3(t) = A_3 v_4(t) + B_3 r_3^2 t^{-2}\overline{v_4(t)}, & t \in l_3 = \{t : \ |t| = r_3\}. \end{cases} \tag{1}$$

Коэффициенты A_p, B_p определяются по формулам:

$$A_p = (\rho_p + \rho_{p+1})/2\rho_p, \ p = 1, 2, 3,$$

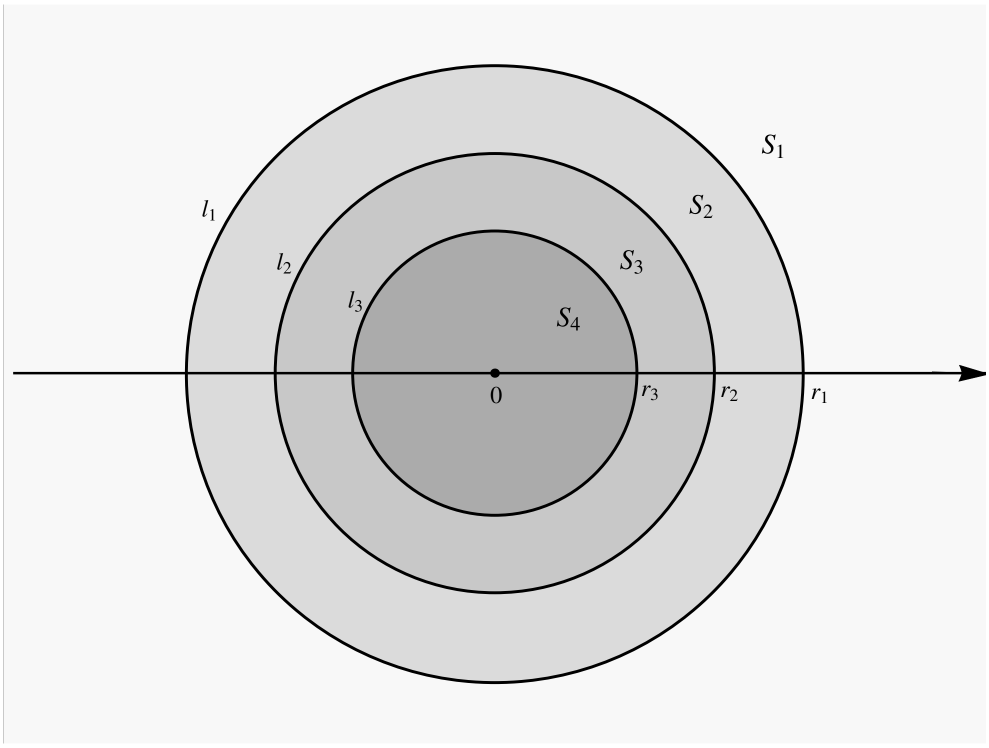

Рис. 1. Кольцевая структура, состоящая из двух концентрических колец

$$B_p = (\rho_p - \rho_{p+1})/2\rho_p, \; p = 1, 2, 3,$$

где ρ_p - коэффициент, постоянный в фазе S_p, характеризующий физические свойства среды.

Введем обозначения:

$$\Delta_p = \frac{B_p}{A_p}, \qquad p = 1, 2, 3.$$

3. Решение

Кусочно-мероморфное решение $v(z)$ задачи (1) с заданной главной частью $F(z) = f'(z)$ можно представить в следующей форме:

$$v(z) = v_p(z) = F_p(z) + V_p(z), \qquad z \in S_p, \quad p = 1, \dots, 4, \tag{2}$$

где $F_p(z)$ - сумма всех слагаемых функции $F(z)$, имеющих полюса в области S_p, а $V_p(z)$ - неизвестная правильная часть, голоморфная в S_p и исчезающая на бесконечности.

Введем обозначения: $S_p^{\pm}$ - соответственно внутренность и внешность окружности $|z| = r_p$. По теореме Лорана функции $V_p(z)$, $p = 2, 3$ представим в виде суммы слагаемых:

$$V_p(z) = V_p^{+}(z) + V_p^{-}(z), \quad V_p^{-}(\infty) = 0, \tag{3}$$

где $V_p^{\pm}(z)$ - функции голоморфные соответственно в областях S_{p-1}^{+}, S_p^{-}.

Рассмотрим совокупность функций:

$$\Phi_1 = \begin{cases} -V_1(z) + A_1[F_2(z) + V_2^-(z)] + B_1 r_1^2 z^{-2}\overline{V_2^+(z_1^*)}, & z \in S_1^-, \\ F_1(z) - A_1 V_2^+(z) - B_1 r_1^2 z^{-2}[\overline{F_2(z_1^*)} + \overline{V_2^-(z_1^*)}], & z \in S_1^+, \end{cases}$$

$$\Phi_2 = \begin{cases} -V_2^-(z) + A_2[F_3(z) + V_3^-(z)] + B_2 r_2^2 z^{-2}\overline{V_3^+(z_2^*)}, & z \in S_2^-, \\ F_2(z) + V_2^+(z) - A_2 V_3^+(z) - B_2 r_2^2 z^{-2}[\overline{F_3(z_2^*)} + \overline{V_3^-(z_2^*)}], & z \in S_2^+, \end{cases}$$

$$\Phi_3 = \begin{cases} -V_3^-(z) + A_3 F_4(z) + B_3 r_3^2 z^{-2}\overline{V_4(z_3^*)}, & z \in S_3^-, \\ F_3(z) + V_3^+(z) - A_3 V_4(z) - B_3 r_3^2 z^{-2}\overline{F_4(z_3^*)}, & z \in S_3^+, \end{cases}$$

где $z_k = r_k^2/\overline{z}$ - точка симметричная с точкой z относительно окружности l_k, $k = 1, 2, 3$.

Функции Φ_k голоморфны в соответствующих областях $S_k^+/\{0\}$, S_k^-, а в силу граничных условий (1) непрерывны на линиях сопряжения этих областей l_k. В нуле у этих функций простые полюса, а в бесконечно удаленной точке, в силу условия ($V_k^{\pm}(\infty) = F_k(\infty) = 0$) они исчезают. По обобщенной теореме Лиувилля $\Phi_k = C_k/z$, где C_k – константы, подлежащие определению. На основании этого составим систему для нахождения искомых функций.

$$\begin{cases} -V_1(z) + A_1[F_2(z) + V_2^-(z)] + B_1 r_1^2 z^{-2}\overline{V_2^+(z_1^*)} = C_1/z, & z \in S_1^-, \\ F_1(z) - A_1 V_2^+(z) - B_1 r_1^2 z^{-2}[\overline{F_2(z_1^*)} + \overline{V_2^-(z_1^*)}] = C_1/z, & z \in S_1^+, \\ -V_2^-(z) + A_2[F_3(z) + V_3^-(z)] + B_2 r_2^2 z^{-2}\overline{V_3^+(z_2^*)} = C_2/z, & z \in S_2^-, \\ F_2(z) + V_2^+(z) - A_2 V_3^+(z) - B_2 r_2^2 z^{-2}[\overline{F_3(z_2^*)} + \overline{V_3^-(z_2^*)}] = C_2/z, & z \in S_2^+, \\ -V_3^-(z) + A_3 F_4(z) + B_3 r_3^2 z^{-2}\overline{V_4(z_3^*)} = C_3/z, & z \in S_3^-, \\ F_3(z) + V_3^+(z) - A_3 V_4(z) - B_3 r_3^2 z^{-2}\overline{F_4(z_3^*)} = C_3/z, & z \in S_3^+. \end{cases} \tag{4}$$

С помощью последнего уравнения системы (4) определим константу C_3.

$$F_3(z) + V_3^+(z) - A_3 V_4(z) = \frac{1}{z}\left(B_3 \frac{r_3^2}{z}\overline{F_4(z_3^*)} + C_3\right), \quad z \in S_3^+. \tag{5}$$

Все слагаемые в левой части равенства (5) голоморфны всюду в круге S_3^+ и, в частности, в точке $z = 0$, следовательно в начале координат должен исчезать коэффициент при $1/z$ в правой части равенства. Имеем

$$C_3 = -B_3 \lim_{z\to 0} \frac{r_3^2}{z}\overline{F_4(z_3^*)}.$$

Легко показать, что последний предел равен $\overline{a_4}$, где $a_4 = -\mathrm{res}_\infty F_4(z)$. Действительно, любая заданная, исчезающая на бесконечности, рациональная функция $F(z)$ представима в виде суммы

$$F(z) = \sum_{k=1}^{l} P_{m_k}\left(\frac{1}{z - z_k}\right),$$

где P_{m_k} - полином порядка m_k, с коэффициентом c_{kj} при z^j и нулевым свободным членом. Поэтому

$$\lim_{z\to 0} r^2 z^{-1}\overline{F(r^2/\overline{z})} = \lim_{z\to 0}\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m_k} \frac{r^2 z^{j-1}\overline{c_{kj}}}{(r^2 - \overline{z_k}z)^j} = \sum_{k=1}^{l}\overline{c_{k1}}.$$

Отсюда на основании теоремы Коши о полной сумме вычетов [3] и следует наше утверждение.

Таким образом,

$$C_3 = -B_3\overline{a_4}.$$

Аналогичным образом находятся

$$C_2 = -B_2\left(\overline{a}_3 - \overline{C_3} - \frac{C_3}{\Delta_3}\right),$$

$$C_1 = -B_1\left(\overline{a}_2 - \overline{C_2} - \frac{C_2}{\Delta_2}\right).$$

Решим систему (4). Для этого из двух последних уравнений исключим функцию $V_4(z)$

$$V_3^-(z) = (1-\Delta_3)F_4(z) + \Delta_3 r_3^2 z^{-2}[\overline{F_3(z_3^*)} + \overline{V_3^+(z_3^*)}] - \frac{C_3 + \Delta_3\overline{C_3}}{z}.$$

Найденное представление подставим в третье уравнение системы (4)

$$V_2^-(z) = A_2F_3(z) + A_2(1-\Delta_3)F_4(z) + A_2\Delta_3 r_3^2 z^{-2}[\overline{F_3(z_3^*)} + \overline{V_3^+(z_3^*)}] - \\ - \frac{A_2(C_3 + \Delta_3\overline{C_3})}{z} + B_2 r_2^2 z^{-2}\overline{V_3^+(z_2^*)} - C_2/z.$$

Из второго уравнения исключим $V_2^-(z)$

$$V_2^+(z) = \frac{F_1(z)}{A_1} - \Delta_1 r_1^2 z^{-2}\overline{F_2(z_1^*)} - \Delta_1 A_2 r_1^2 z^{-2}\overline{F_3(z_1^*)} - \\ - \Delta_1 A_2 r_1^2 z^{-2}(1-\Delta_3)\overline{F_4(z_1^*)} - \Delta_1 A_2 \Delta_3\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2[F_3(z_{13}^*) + V_3^+(z_{13}^*)] + \\ + \frac{\Delta_1 A_2(\overline{C_3} + \Delta_3 C_3)}{z} - \Delta_1 B_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 V_3^+(z_{12}^*) + \frac{\Delta_1\overline{C_2}}{z} - \frac{C_1}{A_1 z}.$$

Здесь и далее $z_{ij}^* = (r_j/r_i)^2 z$. Подставляя найденные представления в четвертое уравнение системы (4), получим функциональное уравнение относительно $V_3^+(z)$

$$V_3^+(z) = -\left(\Delta_1\Delta_3\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 V_3^+(z_{13}^*) + \Delta_1\Delta_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 V_3^+(z_{12}^*) + \Delta_2\Delta_3\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2 V_3^+(z_{23}^*)\right) + \\ + \frac{F_1(z)}{A_1A_2} + \frac{F_2(z)}{A_2} - \frac{\Delta_1 r_1^2 z^{-2}\overline{F_2(z_1^*)}}{A_2} - \Delta_1\Delta_3\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 F_3(z_{13}^*) - \Delta_2\Delta_3\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2 F_3(z_{23}^*) - \\ - \Delta_1 r_1^2 z^{-2}\overline{F_3(z_1^*)} - \Delta_2 r_2^2 z^{-2}\overline{F_3(z_2^*)} - (1-\Delta_3)\left(\Delta_1 r_1^2 z^{-2}\overline{F_4(z_1^*)} + \Delta_2 r_2^2 z^{-2}\overline{F_4(z_2^*)}\right) + \\ + \frac{(\Delta_1+\Delta_2)(\overline{C_3} + \Delta_3 C_3)}{z} + \frac{\Delta_1\overline{C_2} - C_2}{A_2 z} - \frac{C_1}{A_1A_2z}.$$

Обозначим сумму известных слагаемых, стоящих в правой части полученного равенства, через $F_0(z)$ и введем оператор вида

$$K_{ij}V(z) = \Delta_i\Delta_j\left(\frac{r_j}{r_i}\right)^2 V(z_{ij}^*),$$

тогда найденное выше функциональное уравнение примет вид

$$V_3^+(z) = -(K_{13} + K_{12} + K_{23})V_3^+(z) + F_0(z). \tag{6}$$

Все слагаемые в представлении (6) голоморфны в круге S_2^+, поэтому их можно представить в виде сходящихся в этом круге рядов Тейлора

$$V_3^+(z)=\sum_{l=0}^{\infty}c_l z^l,\;\; K_{ij}V_3^+(z)=\sum_{l=0}^{\infty}\Delta_i\Delta_j\left(\frac{r_j}{r_i}\right)^{2l+2}c_l z^l,\;\; F_0(z)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{F_0^{(l)}(0)}{l!}z^l.$$

Учитывая данные разложения из функционального уравнения (6) найдем

$$c_l=\frac{F_0^{(l)}(0)}{l!\left(1+\Delta_1\Delta_3\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^{2l+2}+\Delta_1\Delta_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{2l+2}+\Delta_2\Delta_3\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{2l+2}\right)}.$$

Таким образом, искомым решением является абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$V_3^+(z)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{F_0^{(l)}(0)z^l}{l!\left(1+\Delta_1\Delta_3\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^{2l+2}+\Delta_1\Delta_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{2l+2}+\Delta_2\Delta_3\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{2l+2}\right)}. \tag{7}$$

На основании полученного решения из системы (4) последовательно найдем остальные функции. Учитывая (3) подставим их в представление (2).

$$v_4(z)=F_4(z)+(F_3(z)+V_3^+(z))/A_3-\Delta_3 r_3^2 z^{-2}\overline{F_4(z_3^*)}-C_3/A_3 z,$$

$$v_3(z)=F_3(z)+V_3^+(z)+(1-\Delta_3)F_4(z)+\Delta_3 r_3^2 z^{-2}[\overline{F_3(z_3^*)}+\overline{V_3^+(z_3^*)}]-\frac{C_3+\Delta_3\overline{C_3}}{z},$$

$$\begin{aligned}v_2(z)={}&F_2(z)+A_2F_3(z)+A_2(1-\Delta_3)F_4(z)+A_2\Delta_3 r_3^2 z^{-2}[\overline{F_3(z_3^*)}+\overline{V_3^+(z_3^*)}]-\\&+B_2 r_2^2 z^{-2}\overline{V_3^+(z_2^*)}+\frac{F_1(z)}{A_1}-\Delta_1 r_1^2 z^{-2}\overline{F_2(z_1^*)}-\Delta_1 A_2 r_1^2 z^{-2}\overline{F_3(z_1^*)}-\\&-\Delta_1 A_2 r_1^2 z^{-2}(1-\Delta_3)\overline{F_4(z_1^*)}-\Delta_1 A_2\Delta_3\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2[F_3(z_{13}^*)+V_3^+(z_{13}^*)]-\\&-\Delta_1 B_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 V_3^+(z_{12}^*)+\frac{A_2((\Delta_1-\Delta_3)\overline{C_3}+(\Delta_1\Delta_3-1)C_3)}{z}+\\&+\frac{\Delta_1\overline{C_2}-C_2}{z}-\frac{C_1}{A_1 z},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_1(z)={}&F_1(z)+A_1F_2(z)+A_1A_2F_3(z)+A_1A_2(1-\Delta_3)F_4(z)+\\&+A_1A_2\Delta_3 r_3^2 z^{-2}[\overline{F_3(z_3^*)}+\overline{V_3^+(z_3^*)}]+A_1B_2 r_2^2 z^{-2}\overline{V_3^+(z_2^*)}+\frac{B_1 r_1^2 z^{-2}\overline{F_1(z_1^*)}}{A_1}-\\&-B_1\Delta_1F_2(z)-B_1\Delta_1A_2F_3(z)-B_1\Delta_1A_2(1-\Delta_3)F_4(z)-B_1\Delta_1A_2\Delta_3 r_3^2[\overline{F_3(z_3^*)}+\overline{V_3^+(z_3^*)}]-\\&-B_1\Delta_1B_2 r_2^2\overline{V_3^+(z_2^*)}-\frac{A_1A_2(1+\Delta_1\Delta_2)(C_3+\Delta_3\overline{C_3})}{z}+\frac{(\Delta_1-1)C_2}{z}-\frac{\Delta_1\overline{C_1}+C_1}{z}.\end{aligned}$$

4. Примеры

1)Пусть $f(z)=2\ln(z-4,5)-\ln(z+2-2\mathrm{i})$, $r_1=6$, $r_2=3.5$, $r_3=2$, тогда $F_1(z)=0$, $F_2(z)=2/(z-4,5)$, $F_3(z)=-1/(z+2-2\mathrm{i})$, $F_4(z)=0$. Из функционального уравнения найдем:

$$F_0(z) = \frac{2}{A_2(z-4,5)} + \frac{9\Delta_1}{2A_2(z-18)} - \frac{\Delta_1(2+2\mathrm{i})}{z(2+2\mathrm{i})+36} - \frac{\Delta_2(2+2\mathrm{i})}{z(2+2\mathrm{i})+12,25} - \\ - \frac{\Delta_1\Delta_3}{z+18-18\mathrm{i}} - \frac{16\Delta_2\Delta_3}{16z+98-98\mathrm{i}}.$$

По найденным формулам определим константы C_1, C_2 и C_3

$$C_3 = 0, \qquad C_2 = B_2, \qquad C_1 = -B_1.$$

Примеры полей для источника [4] в точке $z = 4,5$ и стока в точке $z = -2+2\mathrm{i}$ представлены на рисунке (2).

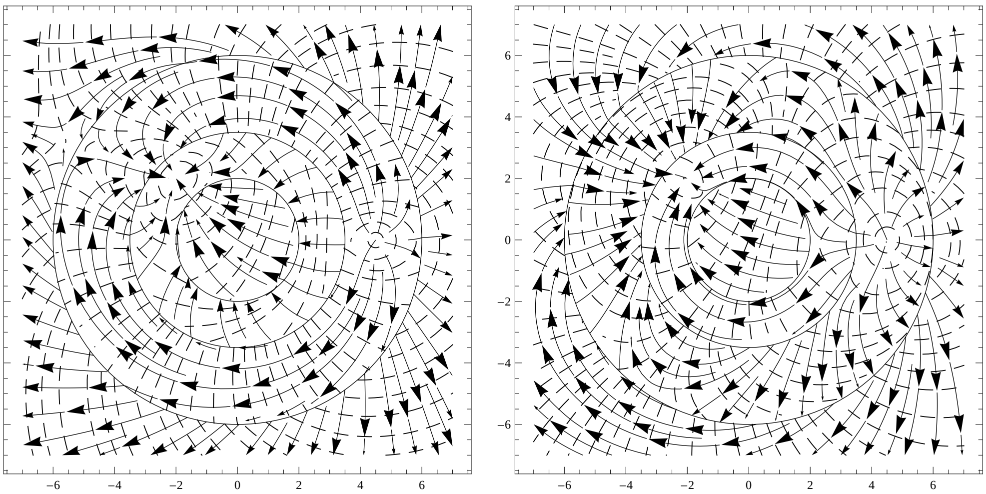

Рис. 2. Источник интенсивности $\Gamma = 4\pi$ и сток интенсивности $\Gamma = 2\pi$: для $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0,2$, $\rho_3 = 5$, $\rho_4 = 0.5$ слева и для $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 10$, $\rho_3 = 2$, $\rho_4 = 50$ справа.

2)Пусть $f(z) = -0,5z^{-2}$, $r_1 = 6$, $r_2 = 4.5$, $r_3 = 2$, тогда $F_1(z) = 0$, $F_2(z) = 0$, $F_3(z) = 0$, $F_4(z) = 1/z^3$. Используя функциональное уравнение найдем:

$$F_0(z) = -\frac{16\Delta_2 z}{6561A_3} - \frac{\Delta_1 z}{1296A_3}.$$

Ввиду отсутствия простых полюсов у функции $f'(z)$ константы C_1, C_2 и C_3 нули. Примеры полей для квадруполя в нуле представлены на рисунке (3).

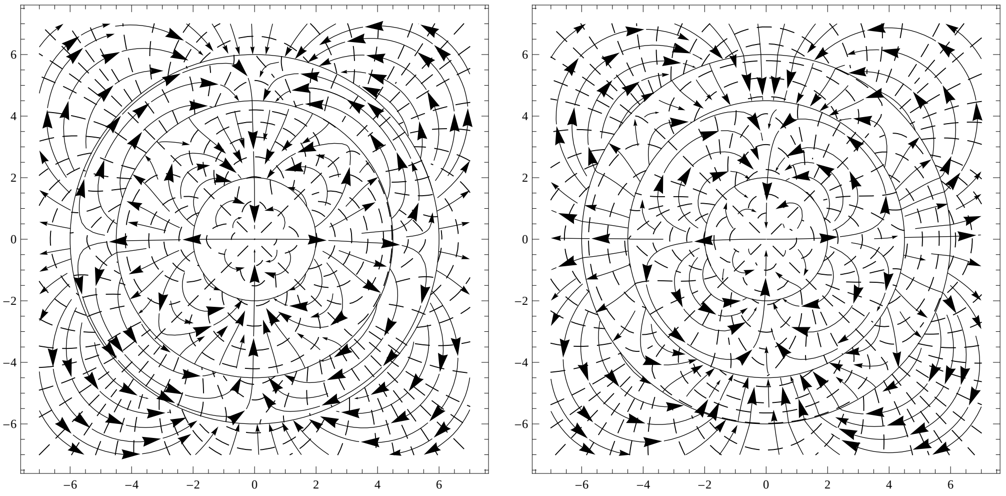

Рис. 3. Квадруполь интенсивности $\Gamma = 2\pi$: для $\rho_1 = 1,\ \rho_2 = 0,1,\ \rho_3 = 100,\ \rho_4 = 10$ слева и для $\rho_1 = 1,\ \rho_2 = 20,\ \rho_3 = 0,1,\ \rho_4 = 10$ справа.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00322).

Summary

A. Yu. Kazarin. The solution of $\mathbb{R}$-linear conjugation problem for two concentric rings in the class of piecewise meromorphic functions.

The problem of $\mathbb{R}$-linear conjugation for two concentric rings is solved in the class of piecewise meromorphic functions with their principal parts fixed in advance. The solution is written with the help of Taylor absolutely and uniformly convergent series. Examples of flow nets (isobars and streamlines) are presented for two different cases.

Key words: (annulus media, the problem of $\mathbb{R}$-linear conjugation, heterogeneous structures, piecewise meromorphic functions, refraction)

Литература

1. *Обносов Ю.В.* Краевые задачи теории гетерогенных сред. Многофазные среды, разделенные кривыми второго порядка.// Казань:, 2009. – 205 с.

2. *Емец Ю.П.* Краевые задачи электродинамики анизотропно проводящих сред. –Киев: Наук.думка. – 1987. – 254 с.

3. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

4. *Милн-Томсон Л.М.* Теоретическая гидродинамика. – М.: Мир, 1964. – 655 с.

Казарин Анатолий Юрьевич – аспирант кафедры дифференциальных уравнений Казанского (Приволжского) федерального университета

E-mail: *alkidkaz@mail.ru*